

R103 — Architecture des ordinateurs

Chapitre 2 — Logique booléenne et circuits électroniques

Clément PAGÈS
`clement.pages@u-pec.fr`

Université Paris-Est Créteil
BUT Informatique 1^{re} année

2025-2026

Architecture des ordinateurs

- S'intéresse aux **composants** des machines et à leur **structure matérielle**.
- Points abordés dans cette ressource
 - ① Éléments de base d'architecture
 - ② Codage de l'information
 - ③ **Algèbre booléenne.**
 - ④ **Circuits logiques élémentaires.**
- Informatique : science du traitement automatisé de l'information.
Contraction de « information » et « automatique ».
- Ordinateur : appareil concret permettant de manipuler de l'information de manière automatisée.

Sommaire

- 1 Algèbre booléenne
- 2 De l'algèbre booléenne aux circuits électroniques

Tour d'horizon

- Un circuit électronique (et par extension, un circuit numérique) est un assemblage d'opérateurs logiques élémentaires réalisant des opérations simples sur des variables logiques.

Tour d'horizon

- Un circuit électronique (et par extension, un circuit numérique) est un assemblage d'opérateurs logiques élémentaires réalisant des opérations simples sur des variables logiques.
- Les états logiques sont
 - **vrai** (ou *true*), valeur 1.
 - **faux** (ou *false*), valeur 0.

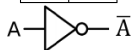
Tour d'horizon

- Un circuit électronique (et par extension, un circuit numérique) est un assemblage d'opérateurs logiques élémentaires réalisant des opérations simples sur des variables logiques.
- Les états logiques sont
 - **vrai** (ou *true*), valeur 1.
 - **faux** (ou *false*), valeur 0.
- Les règles de calcul avec les variables logiques forment l'**algèbre booléenne** (George BOOLE, mathématicien anglais, 1815-1864).
- L'électronique crée un pont entre l'algèbre booléenne et les circuits électriques.

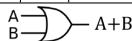
Opérateurs logiques élémentaires

NON, OU, ET

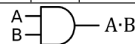
NON	
A	$\bar{A}$
0	1
1	0



OU		
A	B	$A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



ET		
A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



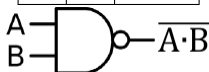
Opérateurs logiques élémentaires

NON ET, NON OU

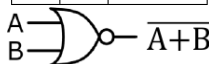
Opérateur **NON ET** renvoie 0 lorsque les deux entrées valent 1 et renvoie 1 sinon.

Opérateur **NON OU** renvoie 0 lorsque les deux entrées valent 0 et renvoie 1 sinon.

NON ET		
A	B	$\overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



NON OU		
A	B	$\overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



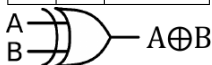
Opérateurs logiques élémentaires

OU exclusif, NON OU exclusif

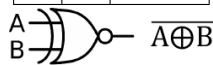
Opérateur XOR (OU exclusif) renvoie 0 lorsque les deux entrées ont sont égales et 1 si elles sont contraires.

Opérateur XNOR (NON OU exclusif) renvoie 1 lorsque les deux entrées ont sont égales et 2 sinon.

XOR		
A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



XNOR		
A	B	$\overline{A \oplus B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Propriétés des portes logiques

Propriétés des opérateurs exclusifs

- $A \oplus B = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}$
- $\overline{A \oplus B} = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$

Propriétés des portes logiques

Propriétés des opérateurs exclusifs

- $A \oplus B = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}$
- $\overline{A \oplus B} = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$

Definition

On dit qu'un opérateur logique est **complet** s'il est possible de l'utiliser pour synthétiser les opérateurs NON, OU et ET.

Propriétés des portes logiques

Propriétés des opérateurs exclusifs

- $A \oplus B = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}$
- $\overline{A \oplus B} = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$

Definition

On dit qu'un opérateur logique est **complet** s'il est possible de l'utiliser pour synthétiser les opérateurs NON, OU et ET.

Théorème — Opérateurs complets

Les opérateurs NON ET et NON OU sont complets.

Propriétés des opérateurs logiques

- Ce sont les mêmes que les propriétés des opérateurs logiques vus en mathématiques discrètes (NON, ET, OU)!

Propriétés des opérateurs logiques

- Ce sont les mêmes que les propriétés des opérateurs logiques vus en mathématiques discrètes (NON, ET, OU)!

Propriétés des opérateurs booléens

- Complémentarité

$$a + \bar{a} = 1 \quad a \cdot \bar{a} = 0$$

$$\overline{a\bar{a}} = 1 \quad \overline{\bar{a} + a} = \bar{a}$$

$$\overline{\bar{a}} = a$$

$$a \oplus \bar{a} = 1 \quad a \oplus 1 = \bar{a}$$

- Règles de Morgan

$$\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$$

$$\overline{a + b} = \bar{a}\bar{b}$$

Sommaire

- 1 Algèbre booléenne
- 2 De l'algèbre booléenne aux circuits électroniques

Fonctions logiques

Formules logiques et circuits

Definition

On appelle **fonction logique** à n variables une fonction
 $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Fonctions logiques

Formules logiques et circuits

Definition

On appelle **fonction logique** à n variables une fonction

$$f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}.$$

Deux aspects :

- Algébrique — On cherche une expression logique pour f , en fonction des variables en entrée.
 - On cherche la **table de vérité** de f .
 - Cas typique : on dispose d'un circuit, on cherche quelle fonction logique il réalise.

Fonctions logiques

Formules logiques et circuits

Definition

On appelle **fonction logique** à n variables une fonction

$$f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}.$$

Deux aspects :

- Algébrique — On cherche une expression logique pour f , en fonction des variables en entrée.
 - On cherche la **table de vérité** de f .
 - Cas typique : on dispose d'un circuit, on cherche quelle fonction logique il réalise.
- Électronique — On cherche un circuit qui réalise une fonction f connue.
 - On simplifie autant que possible l'écriture de f en utilisant les propriétés.
 - On réalise le circuit.

Fonctions logiques

Analyse et synthèse

Definition

On appelle **fonction logique** à n variables une fonction

$$f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}.$$

Fonctions logiques

Analyse et synthèse

Definition

On appelle **fonction logique** à n variables une fonction

$$f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}.$$

- Deux méthodes pour exprimer une fonction logiques

Analyse Donner son équation logique

Synthèse Donner sa table de vérité

Fonctions logiques

Analyse et synthèse

Definition

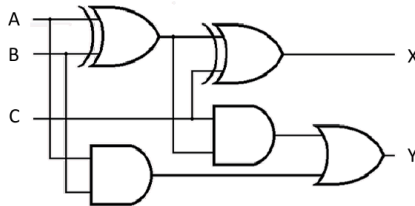
On appelle **fonction logique** à n variables une fonction

$$f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}.$$

- Deux méthodes pour exprimer une fonction logiques
 - Analyse** Donner son équation logique
 - Synthèse** Donner sa table de vérité
- Il faut savoir passer de l'une à l'autre

Analyse d'un circuit

Trouver l'équation logique de X et Y données par le circuit suivant, en fonction des variables A , B , C .



Synthèse d'une table de vérité

- À l'intérieur d'une ligne, les variables sont reliées par un ET.
- Les lignes sont reliées entre elles par l'opérateur OU.

Synthèse d'une table de vérité

- À l'intérieur d'une ligne, les variables sont reliées par un ET.
- Les lignes sont reliées entre elles par l'opérateur OU.

Trouver l'expression de X et Y dans la table de vérité suivante.

Entrées			Sorties	
A	B	C	X	Y
0	0	0	1	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$$X = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + ABC$$

Simplifier une équation logique

- Rend l'équation plus facile à comprendre.

Simplifier une équation logique

- Rend l'équation plus facile à comprendre.
- **Optimise** les circuits électroniques.

Simplifier une équation logique

- Rend l'équation plus facile à comprendre.
- **Optimise** les circuits électroniques.
- Deux méthodes

Simplifier une équation logique

- Rend l'équation plus facile à comprendre.
- **Optimise** les circuits électroniques.
- Deux méthodes
 - Simplifier en utilisant les propriétés de l'algèbre booléenne.
 - Peut être assez long et fastidieux.
 - Pas systématique.

Simplifier une équation logique

- Rend l'équation plus facile à comprendre.
- **Optimise** les circuits électroniques.
- Deux méthodes
 - Simplifier en utilisant les propriétés de l'algèbre booléenne.
 - Peut être assez long et fastidieux.
 - Pas systématique.
 - Utiliser un tableau de Karnaugh
 - Uniquement si le nombre d'entrées est > 2 .
 - Garantit un résultat optimal.

Table de Karnaugh

Principe et exemple

- Répartir les variables en lignes et en colonnes.

$$f(A, B, C) = \bar{A} \bar{B} \bar{C} + \bar{A} \bar{B} C + \bar{A} B \bar{C} + \bar{A} B C + A \bar{B} \bar{C} + A \bar{B} C + A B \bar{C} + A B C$$

$$f(A, B, C) =$$

		C	
AB			

Table de Karnaugh

Principe et exemple

- Répartir les variables en lignes et en colonnes.
- Compléter les valeurs des variables en changeant à chaque fois un seul bit.

$$f(A, B, C) = \bar{A} \bar{B} \bar{C} + \bar{A} \bar{B} C + \bar{A} B \bar{C} + \bar{A} B C + A \bar{B} \bar{C} + A \bar{B} C + A B \bar{C} + A B C$$

$$f(A, B, C) =$$

		C	
		0	1
AB	00		
	01		
	11		
	10		

Table de Karnaugh

Principe et exemple

- Répartir les variables en lignes et en colonnes.
- Compléter les valeurs des variables en changeant à chaque fois un seul bit.
- Remplir les cellules avec le résultat de la formule logique.

$$f(A, B, C) = \bar{A} \bar{B} \bar{C} + \bar{A} \bar{B} C + \bar{A} B \bar{C} + \bar{A} B C + A \bar{B} \bar{C} + A \bar{B} C + A B \bar{C} + A B C$$

$$f(A, B, C) =$$

		C	
		0	1
AB	00	1	1
	01	1	1
	11	0	1
	10	0	1

Table de Karnaugh

Principe et exemple

- Répartir les variables en lignes et en colonnes.
- Compléter les valeurs des variables en changeant à chaque fois un seul bit.
- Remplir les cellules avec le résultat de la formule logique.
- Recouvrir les 1 avec des rectangles dont la taille est une puissance de 2.

$$f(A, B, C) = \bar{A} \bar{B} \bar{C} + \bar{A} \bar{B} C + \bar{A} B \bar{C} + \bar{A} B C + A \bar{B} \bar{C} + A \bar{B} C + A B \bar{C} + A B C$$

$$f(A, B, C) = \bar{A} +$$

		C	
		0	1
AB	00	1	1
	01	1	1
	11	0	1
	10	0	1

Table de Karnaugh

Principe et exemple

- Répartir les variables en lignes et en colonnes.
- Compléter les valeurs des variables en changeant à chaque fois un seul bit.
- Remplir les cellules avec le résultat de la formule logique.
- Recouvrir les 1 avec des rectangles dont la taille est une puissance de 2.

$$f(A, B, C) = \bar{A} \bar{B} \bar{C} + \bar{A} \bar{B} C + \bar{A} B \bar{C} + \bar{A} B C + A \bar{B} \bar{C} + A \bar{B} C + A B \bar{C} + A B C$$

$$f(A, B, C) = \bar{A} + C$$

		C	
		0	1
AB	00	1	1
	01	1	1
	11	0	1
	10	0	1

Table de Karnaugh

Principe et exemple

- Répartir les variables en lignes et en colonnes.
- Compléter les valeurs des variables en changeant à chaque fois un seul bit.
- Remplir les cellules avec le résultat de la formule logique.
- Recouvrir les 1 avec des rectangles dont la taille est une puissance de 2.

$$f(A, B, C) = \bar{A} \bar{B} \bar{C} + \bar{A} \bar{B} C + \bar{A} B \bar{C} + \bar{A} B C + A \bar{B} \bar{C} + A \bar{B} C + A B \bar{C} + A B C$$

$$f(A, B, C) = \bar{A} + C$$

		C	
		0	1
AB	00	1	1
	01	1	1
	11	0	1
	10	0	1

Table de Karnaugh

Principe et exemple

- Répartir les variables en lignes et en colonnes.
- Compléter les valeurs des variables en changeant à chaque fois un seul bit.
- Remplir les cellules avec le résultat de la formule logique.
- Recouvrir les 1 avec des rectangles dont la taille est une puissance de 2.

$$f(A, B, C) = \bar{A} \bar{B} \bar{C} + \bar{A} \bar{B} C + \bar{A} B \bar{C} + \bar{A} B C + A \bar{B} \bar{C} + A \bar{B} C + A B \bar{C} + A B C$$

$$f(A, B, C) = \bar{A} + C$$

		C	
		0	1
AB	00	1	1
	01	1	1
	11	0	1
	10	0	1